

# **Potenziale der numerischen Simulation am Beispiel der Strömungssimulation**

Dr. Axel Müller  
Dr. Axel Müller – HTCO Freiburg

## Zusammenfassung:

Anhand von drei Beispielen aus verschiedenen Anwendungsbereichen wird das Potenzial von Strömungssimulationen exemplarisch aufgezeigt. Hierbei wird skizziert, welche Form von Differentialgleichungen und welche typischen Randbedingungen bei diesen Beispielen verwendet wurden. Aus diesem Grund werden zuvor die jeder Strömungssimulation zu Grunde liegenden physikalischen Gleichungen vorgestellt, ihre Handhabung und Modifikation im Fall ausgebildeter Turbulenz kurz aufgezeigt und auf die zentrale Bedeutung der jeweils zu formulierenden Randbedingungen eingegangen.

Stichworte: Computational Fluid Dynamics (CFD), Navier-Stokes-Gleichung, Turbulenz, Turbulenzmodelle, Randbedingungen, Strömungssimulationen von Wasserbecken, Baggerseen und Hochregallager

## 1. Einleitung

Computergestützte Berechnungsmethoden zur Lösung von praxisbezogenen oder ingenieurmäßigen Fragestellungen gibt es nun seit etwa 40 Jahren. Ihre Entwicklung begann mehr oder weniger gleichzeitig mit den Erscheinen stabiler Rechnerarchitekturen. Mit der Entwicklung der Methode der Finiten Elemente (FEM), deren Ursprung aus dem Bauingenieurwesen stammt, wurde bald darauf ein solides mathematisches wie auch anwendungsrelevantes Fundament geschaffen. Auf dieser Basis haben sich FEM Berechnungen heute zu einem Standardwerkzeug zur Simulation in der Strukturmechanik entwickelt.

In der Strömungsmechanik sieht das etwas anders aus, da die physikalischen Gleichungen ungleich komplexer und numerisch instabiler sind. Erst Mitte der 70er Jahre wurden erste praxisrelevante Fragestellungen auf dem Gebiet der Aerodynamik in der Luft- und Raumfahrt mit speziell dafür entwickelten Diskretisierungs- und Lösungsverfahren angegangen. Die ersten kommerziellen Software Pakete zur Simulation von Strömungen für ‚allgemeinere‘ Aufgaben (general purpose codes) kamen dann erst Anfang der 80er Jahre auf den Markt. Diese haben aber seit dieser Zeit eine rasante Entwicklung durchlaufen, die maßgeblich durch die Leistungsexplosion der Hardware möglich wurde. War es zu Beginn aufgrund des hohen Bedarfs an Hauptspeicher nahezu unmöglich, eine kleine 3-D Strömungssimulation selbst auf einem Supercomputer mit vernünftigen Rechenzeiten durchzuführen, so lassen sich heute schon sehr komplexe industrielle Strömungsaufgaben mit einem normalen PC mit hinreichender Genauigkeit lösen.

Doch während sich FEM Berechnungen in der Strukturmechanik schon längst durchgesetzt haben, und eine Produktentwicklung ohne Zuhilfenahme dieser Technologie schon beinahe als unseriös gilt, gilt für Strömungssimulationen fast noch das Umgekehrte: Strömungssimulationen haftet immer noch der Makel einer komplexen, kosten- und zeitintensiven und zudem ‚unsicheren‘ Disziplin an. Dabei werden CFD Anwendungen prinzipiell, heute wie gestern, nur durch zwei wesentliche Faktoren limitiert: der verfügbaren Rechenleistung der Computer und der Verfügbarkeit von physikalisch-mathematischen Modellen zur adäquaten Beschreibung der zu lösenden Fragestellung.

## 2. Die physikalischen Gleichungen

### 2.1 Die allgemeinen Strömungsgleichungen

Spricht man heute von CFD, so impliziert dies i.a. die numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen. Im einfachen Fall sind dies die folgenden Gleichungen:

$$\rho \{ \partial_t u_i + u_j \partial_j u_i \} - \mu \partial_j \partial_j u_i = - \partial_i P \quad (I)$$

$$\rho c_p \{ \partial_t T + u_j \partial_j T \} - \kappa \partial_j \partial_j T = 0 \quad (II)$$

$$\partial_t \rho + \partial_j \{ \rho u_j \} = 0 \quad (III)$$

Diese Gleichungen sind nichts anderes als ein Ausdruck der Erhaltungssätze von Impuls (I), Energie (II) und Masse (III). Die Problematik der Lösbarkeit dieses Differentialgleichungssystems liegt hierbei an dem nichtlinearen Term  $u_j \partial_j u_i$  in der ersten Gleichung, der für die ‚Bösartigkeit‘ der Strömungsphysik verantwortlich ist, also für die Entstehung von Wirbeln und dem Phänomen der Turbulenz (Es soll hier angemerkt werden, dass die o.g. Navier-Stokes-Gleichungen aber auch im Fall vollausgebildeter Turbulenz gelten).

CFD bedeutet, dass diese Gleichungen mit teilweise unterschiedlichen Methoden (z. B. Finite Volumen Methode, Finite Elemente Methode) diskretisiert und numerisch gelöst werden.

An dieser Stelle ist es wichtig anzumerken, dass nahezu alle physikalischen Beschreibungen von vielen praktischen Fragestellungen durch Modifikation der o.g. Gleichungen erhalten werden können. Hat man zusätzliche Kräfte auf das Fluid wirken, z. B. die Schwerkraft, elektrische Kräfte oder Zentrifugal- und Corioliskräfte, so werden die entsprechenden Terme auf die rechte Seite der Gleichung (I) addiert. Hat man im Temperaturfall Wärmequellen oder Senken, oder Strahlungseffekte, so kommen diese auf die rechte Seite der Gleichung (II). Es genügt also in den meisten Fällen, die zur adäquaten Beschreibung der entsprechenden Fragestellung relevanten physikalischen Terme einfach auf die rechten Seiten der Gleichungen dazuschreiben, oder, im ungünstigeren Fall, weitere Differentialgleichungen hinzuzufügen (z. B. bei Berücksichtigung von Stoffkonzentrationen), die mit dem ursprünglichen Satz (I-III) gekoppelt sind. Die Methodik der Diskretisierung und numerischen Behandlung bleibt dabei unberührt.

## 2.1 Turbulenz

Obwohl diese Vorgehensweise prinzipiell für alle anfallenden Problemstellungen systematisch möglich ist, ist im Fall von ausgebildeter Turbulenz dieses Verfahren allerdings noch bis in absehbare Zeit nicht praktikabel. Dies liegt daran, dass zur Auflösung aller turbulenten Längen- (Wirbel-) Skalen eine enorme Anzahl von zeitlichen und räumlichen Diskretisierungspunkten nötig wäre, um die obigen Gleichungen mit o.g. Verfahren direkt numerisch zu lösen (DNS = Direct Numerical Simulation). Dies würde ungefähr eine Größenordnung von  $10^{18}$  Gitterpunkte bedingen, was immer noch fern jeder Möglichkeiten heutiger Supercomputer liegt. In der Praxis behilft man sich daher bei turbulenten Strömungen, die (leider) in der Mehrzahl aller ingenieurmäßigen Anwendungen vorliegen, mit sogenannten Turbulenzmodellen. Hierbei wird das (turbulente) Geschwindigkeitsfeld in einen langsam und großräumig sich verändernden Teil (mittlere Geschwindigkeit) und einen schnell und kleinräumig fluktuierenden Anteil zerlegt,  $u_i = U_i + \hat{u}_i$ . Die Turbulenzmodellierung wird nun grundsätzlich dadurch gekennzeichnet, dass anschließend über den fluktuierenden Anteil  $\hat{u}_i$  statistisch gemittelt wird. Dies führt zu einer Gleichung, die der ursprünglichen Navier-Stokes-Gleichung (I) sehr ähnlich ist, wenn man das Geschwindigkeitsfeld  $u_i \equiv U_i$  als die Bewegung des mittleren Strömungsfeldes interpretiert. Die Gleichung unterscheidet sich dann lediglich in einem Term  $\rho \partial_j \langle \hat{u}_i \hat{u}_j \rangle$ , dem Reynolds-Stress-Tensor, der die Rückwirkung der turbulenten Effekte auf das großräumige Geschwindigkeitsfeld beinhaltet:

$$\rho \{ \partial_t u_i + u_j \partial_j u_i \} - \mu \partial_j \partial_j u_i + \rho \partial_j \langle \hat{u}_i \hat{u}_j \rangle = -\partial_i P \quad (\text{IV})$$

Das Problem der Turbulenz besteht nun allerdings darin, dass zur Bestimmung dieses Tensors neue Differentialgleichungen hinzukommen, die immer weitere neue Terme erzeugen. Dieses Closure-Problem wird nun dadurch gelöst, und alle derzeit gängigen Turbulenzmodelle unterscheiden sich grundsätzlich nur in der Frage des wie, dass der Reynolds-Stress-Tensor mittels physikalischer Plausibilitätsbetrachtungen und zusätzlichen Annahmen wieder auf das großräumige Strömungsfeld zurückgekoppelt wird. Damit erhält man einen neuen Satz geschlossener Differentialgleichungen. Im Fall des immer noch am meisten verwendeten Turbulenzmodells, dem Standard  $k-\varepsilon$  - Modell, lauten diese Gleichungen dann:

$$\rho \{ \partial_t u_i + u_j \partial_j u_i \} - \mu_t \partial_j \partial_j u_i = -\partial_i P \quad (\text{Ia})$$

$$\rho \{ \partial_t k + u_j \partial_j k \} = \partial_j \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \partial_j k \right) + G + \rho \varepsilon \quad (\text{V})$$

$$\rho \{ \partial_t \varepsilon + u_j \partial_j \varepsilon \} = \partial_j \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \partial_j \varepsilon \right) + c_1 \frac{\varepsilon}{k} G - c_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (\text{VI})$$

Zu der ursprünglichen Navier-Stokes-Gleichung (Ia), wo formal nur die reale Viskosität  $\mu$  durch eine turbulente Viskosität  $\mu_t = \rho c_\mu \frac{\varepsilon^2}{k}$  ersetzt wird, kommen nun zwei neue Gleichungen, eine für die turbulente kinetische Energie  $k = \frac{1}{2} \langle \hat{u}_i \hat{u}_i \rangle$  und eine für die turbulenten Dissipationsenergie  $\varepsilon = \frac{\mu}{\rho} \langle (\partial_j \hat{u}_i) (\partial_j \hat{u}_i) \rangle$ . Die Funktion  $G$  hat hier die Form  $G = \frac{\mu_t}{\rho} (\partial_j u_i + \partial_i u_j) \partial_j u_i$ .

CFD bedeutet nichts anderes als diesen Satz von Gleichungen, für den laminaren und direkten Fall die Gleichungen (I-III), im vollturbulenten Fall Gleichungen vom Typ (Ia, V-VI) unter verschiedenen Randbedingungen numerisch zu lösen.

### 3. Die Randbedingungen

Sind diese Gleichungen der Strömungsphysik für jede zu lösende praktische Fragestellung mehr oder weniger dieselben, so unterscheiden sich die verschiedenen Anwendungsfelder wesentlich durch die unterschiedlichen Randbedingungen. Den Randbedingungen kommt hierbei eine zweifach

entscheidende Bedeutung zu. Zum einen sind Randbedingungen vom mathematischen Standpunkt aus absolut notwendig, um partielle Differentialgleichungen, wie die der Strömungsphysik, überhaupt lösen zu können. Zum anderen, und dies ist für die Anwendung auf eine ingenieurmäßige Fragestellung viel entscheidender, sind die Randbedingungen der Spiegel der Einflüsse der gesamten Umgebung auf das zu untersuchende Strömungsgebiet, d.h. die Randbedingungen müssen die Ankopplung des ‚isolierten‘ Strömungsbereiches an die Umgebungssituation anwendungsabhängig ‚korrekt‘ abbilden. Als Beispiel solcher Randbedingungen sollen hier nur zwei Klassen kurz erwähnt werden:

### *3.1 Geometrie*

Die erste und wichtigste dieser Bedingungen sind die Umrandungen des Strömungsgebiets selbst, d.h. die Geometrie des Strömungsgebiets. Diese Geometrie beeinflusst entscheidend, welche Strömungsstrukturen sich überhaupt ausbilden können. Hierbei lassen sich wiederum ganz grob zwei Grundtypen unterscheiden, welche man landläufig entweder als Innenströmung oder als Außenströmung bezeichnet. Bei Innenströmungen handelt es sich um Strömungen, die mehr oder weniger ganz von Wänden umgeben sind. Dies ist die Mehrzahl aller Strömungen, die in der Verfahrenstechnik, im Maschinenbau oder auch in der Wärmetechnik vorkommen. Beispiel dafür sind Rohrströmungen, Motorströmungen, Innenraumbelüftung, Strömungen in Werkzeugen, Gebäudeklimatisierung, Wärmetauscher usw.. Im Gegensatz dazu findet man Außenströmungen bei der Umströmung von Flug- oder Fahrzeugen, d.h. überall dort, wo das Medium nicht von einer limitierenden Wand umgeben ist.

Unter die Rubrik Geometrie fällt natürlich auch, wo und wie ein Medium in eine Geometrie ein- und ausfließt, also die Einström – und Auslaufbedingungen. Beispiele hierfür sind Massenströme, Druckrandbedingungen, Drall- und Turbulenzintensitäten etc..

### *3.2 Temperatur*

Eine andere Klasse von Randbedingungen ergibt sich, wenn auch der Wärmetransport im und über das strömende Medium eine Rolle spielt. In diesem Fall ist es notwendig, die Wärmeströme, Wärmequellen, Temperaturen etc. an den Rändern des Strömungsgebiets zu spezifizieren. Hinzu kommen dann noch weitere Besonderheiten, wie z. B. Wärmeübergänge an Grenzflächen oder der Wärmeein- und austrag durch Strahlungseffekte.

Die Vielzahl der Möglichkeiten der in der Realität auftretenden Randbedingungen, und deren vielfältigen Kombinationen, führen letztendlich dazu, dass jede Strömungsberechnung oder Simulation mehr oder weniger ein Unikat ist.

Und noch entscheidender: in der ‚richtigen‘ Spezifikation der Randbedingungen liegt auch der Schlüssel der Güte einer Strömungssimulation, deren ‚Wahrheit‘ und Aussagekraft im Hinblick auf die simulierte Realität.

## 4. Beispiele

Als Beispiele für das oben Ausgeführte und gleichzeitig als Beispiele für das große Einsatzpotenzial von Strömungssimulationen sollen hier drei verschiedene Fragestellungen dienen. Diese Fragestellungen sollen kommen aus ganz verschiedenen Anwendungsbereichen und unterscheiden sich, wie oben erläutert, nur durch die Hinzunahme weiterer physikalischer Terme in den Differentialgleichungen und den dabei auferlegten Randbedingungen.

### 4.1 Geometrische Randbedingung – Optimierung eines Rückhaltebeckens

Beim ersten Beispiel handelt es sich um die Frage, ob und wie es möglich ist, ein Klärbecken so zu konzipieren, dass sich eine automatische Selbstreinigung einstellt und diese auch noch quantifizierbar ist. Hintergrund dieser Fragestellung ist der, dass geplant ist bei Autobahnneubauten die bei Regen oder Unwetter auftretende Ausspülung des Fahrbahnschmutzes (Gummi, Öl, Schadstoffe) in die umgebende Landschaft zu verhindern. Dazu soll dieses Wasser kontrolliert in neuartige Retentionsbecken geleitet werden, die eben dieses Wasser definiert sedimentieren und somit reinigen können. Da diese Becken, da sie klein und vielzählig sind, nicht mit aufwendiger Klärtechnik versehen, geschweige denn manuell gewartet werden können, muss die Beckenform allein gewährleisten, dass eine beruhigte Gleichverteilung des eingebrachten Schmutzwassers erreicht wird, dessen Sedimentationsvermögen nicht durch turbulente Rückmischung oder starke Strömungsgradienten im Becken gestört ist.

*Physik und Randbedingungen:* es werden verschiedene Beckengeometrien vorgegeben. Grundlage sind hier nur die Navier-Stokes-Gleichungen in ihrer turbulenten Form als Differentialgleichungen, sowie die Vorgabe des Massenstromes am Beckeneintritt als Randbedingung.

Berechnung 2-d und 3-d, stationär.

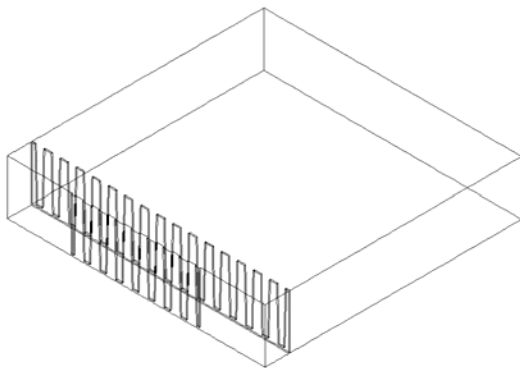


Abb.1: Ursprüngliche Geometrie

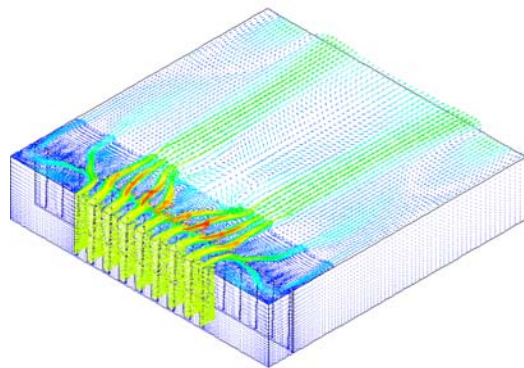


Abb. 2: unsymmetrische Strömung

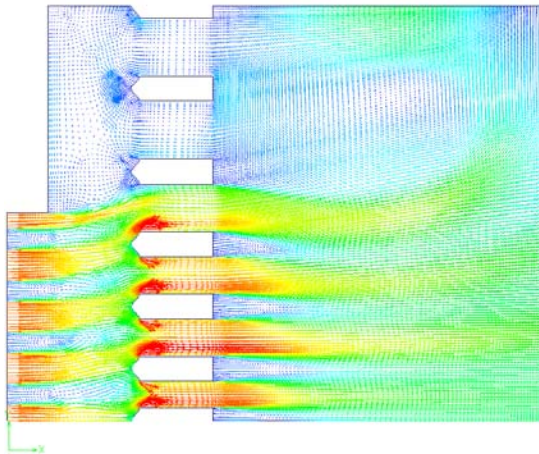


Abb. 3: Rechteck mit Störkörpern,  
asymmetrische Strömung

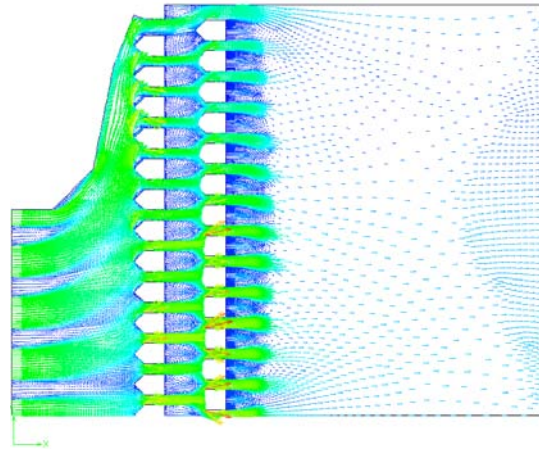


Abb. 4: neue Beckenform

Ergebnis: mittels Strömungssimulation ist es gelungen, eine Beckenform zu entwickeln, welche in der Lage ist die einfallende Strömung auf die gesamte Beckenbreite und zugleich gleicher Geschwindigkeit zu verteilen. Großräumige Wirbel und vertikale Gradienten gibt es nicht. Ein ungestörtes Sedimentationsverhalten ist gewährleistet.

#### 4.2 Thermische Randbedingung – Konvektion

Dieses zweite Beispiel berücksichtigt neben der Geometrie, die wie man sehen wird dennoch die entscheidende Rolle spielt, nun auch die Temperatur. Es geht hierbei um das Strömungsverhalten in stillgelegten Baggerseen, d. h. um die großräumige Strömung, welche i. w. durch die Temperaturgradienten im See getrieben wird. Die Frage ist hier, ob und wie sich eine solche Strömung einstellt, welche dann für eine kontinuierliche Durchmischung des Sees sorgt und auch die Tiefwasserzonen mit Sauerstoff versorgt. Hintergrund ist hier die Diskussion, ob ausgedehnte Flachwasserzonen an den Seeufern eine positive Wirkung auf dieses Verhalten haben, da dieses Flachwasser sich im Winter stärker abkühlen kann und dann auf Grund der höheren Dichte in die Tiefe strömt und damit eine globale Strömung antreibt.

*Physik und Randbedingungen:* auch hierbei werden die Geometrien vorgegeben. Grundlage sind wieder die Navier-Stokes-Gleichungen in ihrer turbulenten Form als Differentialgleichungen, hier nun mit einem Zusatzterm, der die temperaturabhängige Dichte beschreibt und damit für die Ankopplung an die Gravitation sorgt. Als Randbedingung werden nur die Temperaturen an der Seeoberfläche ( $T=0^\circ$ , Winter) und am Seegrund ( $T=9^\circ$ , konstant) vorgegeben. Der See ruht zu Beginn.

Berechnung 2-d, rotationssymmetrisch, stationär.

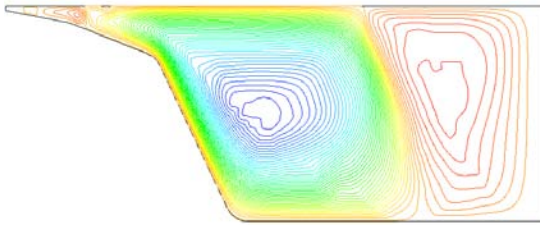


Abb. 5: Stromlinien ohne Flachwasserzone

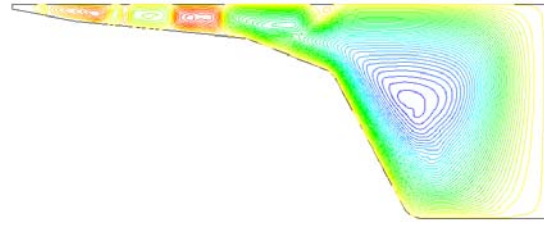


Abb. 6: Stromlinien mit Flachwasserzone

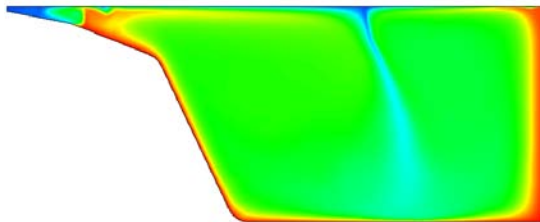


Abb. 7: Temperaturverteilung ohne FWZ

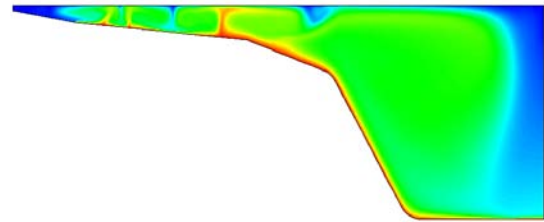


Abb. 8: Temperaturverteilung mit FWZ

Ergebnis: der Einfluss der Flachwasserzone bringt nicht den vermuteten Effekt. Das kalte Wasser läuft nicht bis zum Seeboden ab, sondern sorgt im Gegenteil für eine negative Segmentierung des Sees, also für räumlich voneinander getrennte Strömungsregimes, was negativen Einfluss auf die Durchmischung des Sees hat.

#### 4.3 Thermische Randbedingung – Konvektion und Strahlung

Dies ist ein Beispiel noch komplizierterer Fragestellung: glühend heiße Stahlstäbe sollen zum Abkühlen in ein Hochregal innerhalb einer Fabrikhalle eingelagert werden. Die auftretende Fragestellung ist die: was passiert mit der Temperatur in dieser Halle? Es wird eine starke Konvektion einsetzen, welche die Wärme an die Hallendecke treibt. Gleichzeitig werden sich aber auch die Stahlstäbe gegenseitig beeinflussen über die von ihnen erzeugte Konvektion und auf Grund ihrer wechselseitigen Strahlung. Die gesamte Wärmewechselwirkung ist überaus kompliziert und mit der auftretenden Strömung stark gekoppelt. Wie ist letztendlich die Temperaturverteilung in der Halle?

*Physik und Randbedingungen:* auch hierbei werden die Geometrien vorgegeben. Grundlage sind wieder die Navier-Stokes-Gleichungen in ihrer turbulenten Form als Differentialgleichungen, hier wieder mit dem Zusatzterm der Gravitation. Weiterhin kommen sämtliche Strahlungswechselwirkungen aller Flächen untereinander, inklusive gegenseitiger Schattenbildung, nach dem Boltzmann'schen  $T^4$  Gesetz hinzu. Als Randbedingung werden nur die Temperaturen der zuletzt eingebrachten Lage der Stahlstäbe ( $T=1200^\circ$ ) vorgegeben. Die Luft in der Halle ruht zu Beginn.

Berechnung 2-d, instationär.

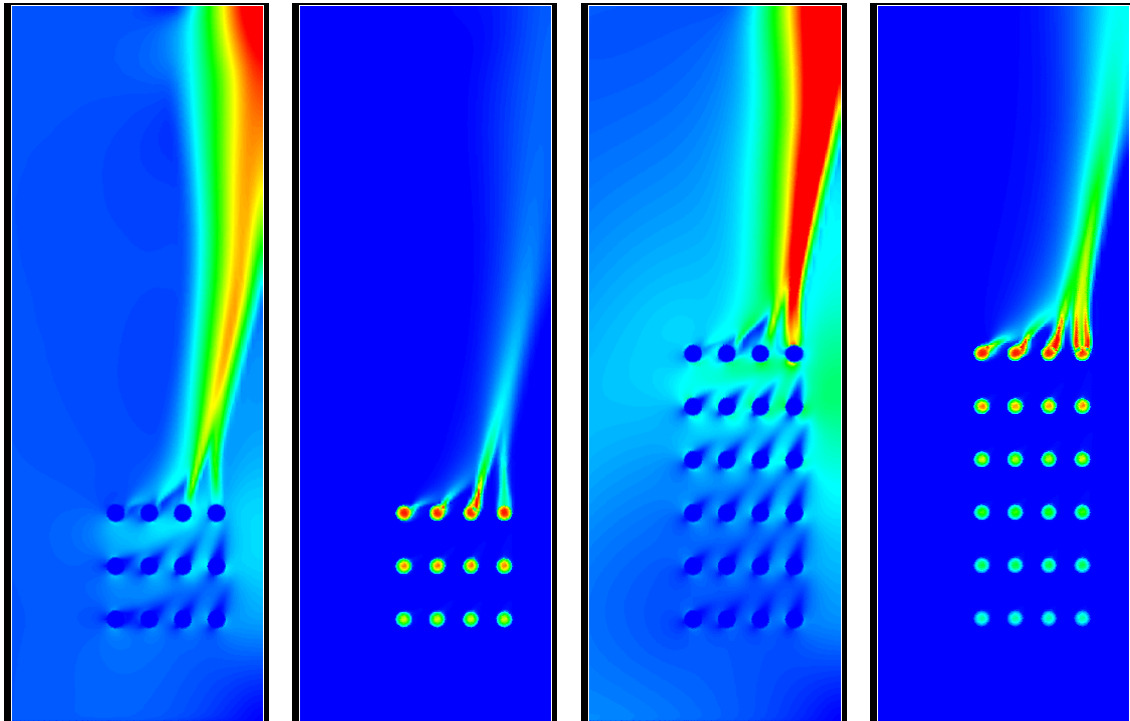


Abb. 9: Geschwindigkeit bei 3 Lagen, Temperatur bei 3 Lagen, Geschwindigkeit bei 6 Lagen, Temperatur bei 6 Lagen (v.l.n.r.)

Ergebnis: der Einfluss der Strahlung ist dramatisch, der Strahlungsanteil an der Wärmebilanz beträgt über 80%. Das heißt, ein Betrieb eines solchen Lagers in einer Halle ist nur mit erheblichen zusätzlichen Wärmeschutzmaßnahmen (Einhausen etc.) möglich.

## 5.) Zusammenfassung

Die numerische Strömungssimulation ist heutzutage ein leistungsstarkes Werkzeug. CFD ist die einzige Methode mit der es möglich ist, die hochgradig nichtlinearen Gleichungen der Strömungsphysik, zumindest näherungsweise, zu lösen. Der heutige Entwicklungsstand von entsprechender Software und das Leistungspotenzial gegenwärtiger Rechner ermöglicht es sehrwohl, viele

Aufgabenstellungen aus der Praxis mit der hinreichenden Verlässlichkeit zu bearbeiten und zu lösen.

Das Potenzial von numerischer Strömungssimulation ist dabei nahezu unbegrenzt, da die zu lösenden Gleichungen für jegliche Art von Strömung im Prinzip dieselben sind. Der wichtigste und kritischste Punkt ist dabei die Formulierung der Randbedingungen, d.h. inwieweit die für die Numerik wichtigen Randbedingungen dem ‚richtigen‘ Abbild der Wirklichkeit entsprechen. Dort ist das Wissen, die Intelligenz und die Erfahrung des Strömungssimulanten unerlässlich.